Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Enero-Abril 2004

EJERCICIOS SUGERIDOS PARA LA PRACTICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES

1.- Compruebe que la función indicada sea una solución de la ecuación diferencial dada

ECUACION	***FUNCION***
a) $y'' - 2y' + y = 0$	a) $y = x\,e^{x}$
b) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$	b) $x^2 + y^2 - 4 = 0$
c) $\dfrac{dy}{dx} = 8\,\text{sen}\,x$	c) $y = -2\cos 4x + C$
d) $y' + y = \text{sen}\,x$	d) $y = \dfrac{1}{2}\text{sen}\,x - \dfrac{1}{2}\cos x + 10\,e^{-x}$
e) $\dfrac{dy}{dx} - 2y = e^{3x}$	e) $y = e^{3x} + 10\,\mathrm{e}^{2\mathrm{x}}$
f) $y' + 2x\,y = 1$	f) $y = e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\mathrm{t}^2}dt + C_1\,e^{-x^2}$
g) $y' = 25 + y^2$	g) $y = 5\tan 5\mathrm{x}$
h) $\dfrac{dx}{dt} = (2 - x)(1 - x)$	h) $\ln\dfrac{2-x}{1-x} = t$

2.-.Resolver las ecuaciones diferenciales de variables separables.

a).- $y' = \dfrac{y-1}{1+x^2}, \qquad \mathrm{y}(3) = 1$

b).- $y' = (1 + y^2)(3x^2 - 1)$

c).- $dx = (x-2)\,\text{sen}\,t\,dt$

d).- $x\,\text{sen}\,x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{y}}dx - y\,dy = 0$

e).- $(x^2y-y)dx+(x^2-2yx^2)dy=0$

f.- $\dfrac{dy}{dx}=C\,y^3(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad y(0)=1$

g).- $\operatorname{sen}3xdx+\cos 2ydy, \quad y(\frac{\pi}{3})=0$

h).- $\dfrac{dy}{dx}=xy^3(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$

i).- $(x^2y-y)dx+(x^2-2yx^2)dy=0$

j).- $(e^x+1)y'=y-ye^x$

3.- Determine las constantes reales a, b para que la función $y=ae^x+be^{2x}$ sea solución de la ecuación diferencial ordinaria . $y''-3y+2y=0$, Con $y(0)=5, \quad y'(0)=8$ respuesta: a=2, b=3

4.- Hallar las trayectorias ortogonales de la familia que se indican y Haga un dibujo que ilustre ambas familias.

a) $y^2=a\,x$ $(a\in \mathrm{R})$.

b) $y^2=c+cx, \quad c$ constante.

c) $x-y=c\,\mathrm{e}^{\mathrm{x}}$

5.- Dada la EDO $y'=1-y^{100}$

(i) Dibuje el campo direccional.
(ii) Resuelva gráficamente el problema

$y'=1-y^{100}$ con $y(0)=0$

(iii) Si ϑ es solución del problema (ii) explique por que $-1<\vartheta(x)<1 \ \forall x\in R$.

6.- Determine los valores de m tales que $y=x^m$, sea una solución de la ecuación diferencial respectiva.

a) $x^2y''-y=0$

b) $x^2y''+6\,x\,y'+4\,y=0$

7.- .- Resolver las ecuaciones diferenciales homogéneas a,. $xy' = y(Lny - Lnx)$

b..- $dy + x(x-y)dx = 0$

c.- $y' = 1 + (\frac{y}{x})^2 + \frac{y}{x}$

d.- $(x+y)dx - (x-y)dy = 0$

e.- $y' = \frac{x^2 + y^2}{x^2}$

f.- $y' = \frac{x+y-2}{y-x-3}$

g .- $y' = \frac{4x+3y+8}{8x-6y-7}$

h.- $\frac{x-y-4}{y+x-10} = \frac{dy}{dx}$

i.- $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+7}{x-y+1}$

8.- Resolver las ecuaciones diferenciales-

a.)- $y' = (x+y)^2$

b).- $y' = \frac{1}{\sqrt{x+y}}$

c).- $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y-4}{2x+y-5}$

d).- $y' = \frac{\cos(x+y+1)}{1-\cos(x+y+1)}$

9 -Resolver las ecuaciones diferenciales lineales.

a).- $xy' + y = 3xy$, $\quad$ y(1) = 0

b).- $y' + y = e^x$, $\quad$ y(0) = 1

c).- $y' + 2xy = x$, $\quad$ y(0) = -2

d).- $(1+x)y' + y = \cos x$, $\quad$ y(0) = 1

e).- .- $x\,y' = 3y + x^4 \cos x$, $\quad$ $y(2\pi) = 0$

f).- $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{2x}$, $\quad$ $y(0) = \frac{1}{2}$

g).- $y' + \frac{1}{2}y = \operatorname{sen} x$

h).- $y'(e^y - x) = y$

i).- $y' + (\cot x)y = 2\cos ecx$

j).- $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{2x}$

k).- $\frac{dx}{dt} + (Lnt)x = t^{-t}$

10 .- .- Resolver las ecuaciones diferenciales de Bernoulli
.

a).- $\frac{dy}{dx} + y = x\, y^3$

b).- $\frac{dy}{dx} + \frac{3y}{x} = 6x^2$

c).- $x\frac{dy}{dx} - 2y = 2x^4$, $y(2) = 8$

d).- $\frac{dy}{dx} + 4xy = 8x$

e).- $(u^2 + 1)\frac{dv}{du} + 4uv = 3u$

f).- $\frac{dy}{dx} + 3x^2 y = x^2$ $y(0) = 2$

g).- $(u^2 + 1)\frac{dv}{du} + 4uv = 3u$

h).- $\frac{dy}{dx} + 3x^2 y = x^2$ $y(0) = 2$

i).- $(x^2 + x - 2)\frac{dy}{dx} + 3(x+1)y = x - 1$

j).- $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{2x} = \frac{x}{y^3}$; $y(1) = 2$

k).- $2\,x\,(y+1)\,dx - (x^2 + 1)\,dy = 0$; $y\,(1) = -5$

l).- $\frac{dx}{dt} + \frac{t+1}{2t}x = \frac{t+1}{xt}$

m).- $\frac{dy}{dx} + 3y = 3x^2\, e^{-3x}$

n).- $e^x\,(y - 3\,(e^x + 1)^2)\,dx + (e^x + 1)\,dy = 0.$ $y\,(0) = 4$

o):- $(\cos^2 x - y\cos x)\,dx - (1 + \operatorname{sen}x)\,dy = 0$

p).- $\frac{dr}{d\theta} + r\,tg\theta = \cos^2\theta$; $r\,(\frac{\pi}{4}) = 1$

11.- $y\,dx + (x\,y^2 + x - y)\,dy$

q).- $x\frac{dy}{dx} + \frac{2x+1}{x+1}y = x - 1$

11 .- .- Resolver las ecuaciones diferenciales de Riccati

a)- $\frac{dy}{dx} = (1-x)\,y^2 + (2x-1)\,y - x$; dada $f(x) = 1$

b)- $\frac{dy}{dx} = -y^2 + x\,y + 1$; dada $f(x) = x$ c)- c.-

$\frac{dy}{dx} = -8\,x\,y^2 + 4x\,(4x+1)\,y - (8x^3 + 4x^2 - 1)$; dada $f(x) = x$

12:-Sea $\begin{cases} xy' = 2y \\ y(0) = 0 \end{cases}$

(a) Halle dos soluciones diferentes de este problema y explique por qué ello no contradice el teorema de Picard.

(b) ¿Existe una solución no nula que tenga asíntota en $+\infty$? Justifique su respuesta.

13.- Considere el problema de valor inicial $\frac{dy}{dx} = \frac{y+2}{x}$, y(0) = -2

a) Decida si se puede aplicar el teorema de Picard.

b) Determine al menos dos soluciones del problema.
Justifique su Respuesta.

14.-Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o Falsas. Justifique su respuesta.

a) ¿Existe solución del problema $y' = (\sqrt{x})y$, $y(0) = 1$ que satisfaga $y(1) = 5$?

b) Dado el problema $y' = \sqrt{xy}$, y(-1) = -4. ¿Se puede garantizar el teorema de Picard en el rectángulo $R = \{(x, y) : -5 \leq x \leq 3, \quad -4 \leq y \leq -1 \}$?

c) ¿Existe solución del problema $y' = (\sqrt{x})\, y$, $y(0) = 1$ que satisfaga $y(1) = 5$?

15.- Sean a y b constantes positivas y sea ϑ una solución de $y' = ay - by^2$ con $y(0) = y_0$ .Demuestre que si $y_0 < 0$ entonces ϑ no está acotada.

16- a) Sea k>1 Demuestre que si p(x) y q(x) son funciones continuas en un intervalo J que contiene a x_0, entonces para cada y_0 real, el problema

$$y' + p(x)y = q(x)y^k, \quad y(x_0) = y_0$$

Tiene única solución $y = \Phi(x)$ definida para todo x de un intervalo I contenido en J y que contiene a x_0.

b) Si 0<k<1, (a) es falso. Compruébelo considerando el problema

$$y' = y^{\frac{2}{3}}, \quad y(0) = 0$$

17. -Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o Falsas. Justifique su respuesta.

a) ¿Existe solución del problema $y' = (\sqrt{x})y$, $y(0) = 1$ que satisfaga $y(1) = 5$?

b) Dado el problema $y' = \sqrt{xy}$, y(-1) = -4. ¿Se puede garantizar el teorema de Picard en el rectángulo?

18. Dada la ecuación diferencial $y' = (1+x)y^2 - (2x+1)y + x$,

i) Encuentre una solución de la forma $y = x^n$ para alguna n

ii) Usando (i), dé la solución general de la ecuación dada.

19 Encuentre el n-èsimo polinomio de Picard para la ecuación $y' = 2xy$, $y(0) = 1$.

20- La longitud de la línea normal desde cualquier punto de una curva al eje x es siempre igual a una constante b. Encuentre la ecuación de la curva que pasa por el punto (0,b).

21.- La longitud de la línea normal desde cualquier punto de una curva al eje x, es siempre igual a una constante a. Encuentre la ecuación de la curva si pasa por el punto (a,0).

22..- Resolver la ecuación diferencial $2\,x\,e^{2y}\dfrac{dy}{dx} = 3x^4 + e^{2y}$.

23.- Resolver la ecuación diferencial con valor inicial : $x\,y' + 6y = 3\,x\,y^{4/3}$, $y(1) = 8$.

24.--Halle la solución de $xy' - 2y = x^3$, $y(1) = 2$

25.- Halle la solución de $\begin{cases} xy' - 2y = x^3 \\ y(1) = 2 \end{cases}$

26.- Halle la solución del problema $y' = (x + y + 1)/(x + y)$, $y(0) = 1$.

27.-(a) Determine la solución de la ecuación diferencial $y' - \dfrac{3}{x}y = x^4\ y^{\frac{1}{3}}$ que satisfaga $y(1) = 0$

b)¿ Es la solución obtenida, única en algún intervalo que contenga $x_o = 1$?

28.- Resolver la ecuación $x^2\ y' - 2\,x\,y + x^2 y^2 + 2 = 0$, si tiene una solución de la forma $y = x^{-k}$, k constante.

29.- Dada la ecuación diferencial $y' = (1+x)y^2 - (2x+1)y + x$,

i) Encuentre una solución de la forma $y = x^n$ para alguna n

ii) Usando (i), dé la solución general de la ecuación dada.

30 .-Para la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2 .$$

i) Determine la constante c tal que $y = \frac{c}{x}$ es una solución particular

ii) Resuelva la ecuación.

MISELANEA DE EJERCICIOS PARA EL SEGUNDO EXAMEN

1. Resolver las ecuaciones diferenciales.

a.- $(y^2 + x\,y + y)\,dx - (x+1)^2\,dy = 0$

b.- $(y + x^3)\,dy + (3y\,x^2 - 3\,x^5)\,dx = 0$ sí y (1)=2.

c. $(x + y^3)\,dx + (3\,x\,y^2 - 3y^5)\,dy = 0$

d. $x^2 y' - 2\,x\,y + x^2 y^2 + 2 = 0,$ si tiene una solución de la forma $y = x^{\alpha}, \alpha$ constante

e.- $(x^2 + x\,y + x)\,dy - (y+1)^2\,dx = 0$.

f.- $y'(1 + (y')^2) = y''$.

g. $y^2 dx + (y^2 x + xy - 1)dy = 0, y(0) = -1.$

h. $(2y^3 + 4x\,y)dy + (2y^2 - x)dx = 0$

i.- $\begin{cases} xy' - 2y = x^3 \\ y(1) = 2 \end{cases}$

j.- $(x + y^3)dx + (3xy^2 - 3y^5)dy = 0$ con $y(2) = 1$.(Sugerencia: utilizar el cambio $u = y^3$)

k - $y' = (x + y + 1)/(x + y)$, $\text{y}(0) = 1$

l.- $2\,x\,y\,y' \cos^2(y/x) - 2y^2 \cos^2(y/x) - x\,y\,sen^2(y/x) = 0$

m.- $(y^2 + xy + y)dx - (x+1)^2 dy = 0$

n.- $x^2y' - 2xy + x^2y^2 + 2 = 0$, si tiene una solución de la forma, $y = x^{-k}$, k constante.

o. $(y + x^3)\,dy + (3y\,x^2 - 3\,x^5)\,dx = 0$ sí y (1)=2.

p.- $(x + y^3)\,dx + (3\,x\,y^2 - 3y^5)\,dy = 0$

q. $(x^2 + x\,y + x)\,dy - (y+1)^2\,dx = 0$ r.- Resolver $y'(1 + (y')^2) = y''$.

s. $y^2\,dx + (y^2x + x\,y - 1)\,dy = 0, \qquad y(0) = -1.$

t.- $(2y^3 + 4x\,y)\,dy + (2\,y^2 - x)\,dx = 0$

u.- $2\,x\,y\,y'\cos^2(y/x) - 2y^2\cos^2(y/x) - x\,y\,sen^2(y/x) = 0$

v- $y' - \frac{3}{x}y = x^4\;y^{\frac{1}{3}}$

x.- $y'' - 2y + y = \frac{e^x}{x}$, $\qquad y(1) = 0\;,\;\mathrm{y}'(1) = 1.$

y.-- $y''\,\mathrm{x} - \mathrm{y}' = \mathrm{x}^2e^x$, $\qquad y(0) = 1,\;\; y'(1) = 0$.

z.- $y\,\mathrm{y}'' = (\mathrm{y}')^2$.

2.- Si en la ecuación de Riccati $y' = q_1 + q_2y + q_3y^2$, se conocen tres soluciones particulares y_1, y_2, y_3 distintas, se puede demostrar que la solución completa de $v' = -(q_2 + 2q_3y_3)v - q_3$ viene dada por:

$$\frac{v - v_1}{v_2 - v_1} = c \text{ con } v_1 = \frac{1}{y_1 - y_3}\;,\; v_2 = \frac{1}{y_2 - y_3}\;,\; y = y_3 + \frac{1}{v}$$

Escriba la ecuación de Riccati cuyas soluciones particulares son $y_1 = 0,\; \mathrm{y}_2 = x,\;\; \mathrm{y}_3 = x^2$

3.- .Halle una solución explicita del problema la solución de la ecuación diferencial

$$y' = y(xy^2 - 3), \quad \mathrm{y}(17/6) = 1$$

Indicando el intervalo de definición de la misma.

4..- Demostrar que la curva para la cual la pendiente de la tangente en cualquier punto es proporcional a la abscisa en el punto de contacto es una parábola

5.- Hallar la familia de curvas tal que si l es la recta tangente en el punto $P(x_0, y_0)$ a la familia y Q es el punto de intersección entre l y el eje Y entonces la distancia de P a Q es igual a la distancia de Q a (0,0)

6.- Sea C una curva en el primer cuadrante para la cual la distancia desde un punto cualquiera P de la misma al origen es igual a la longitud del segmento de tangente a la curva en P, cuyos extremos son P y su intersección con el eje x. Sabiendo que C pasa por el punto (2,1), halle su ecuación
JUSTIFIQUE SU RESPUESTA

7.- Demuestre que la curva para la cual la pendiente de la tangente en cualquier punto es proporcional a la abscisa en el punto de contacto es una parábola.

8- Sea C una curva en el primer cuadrante para la cual la distancia desde un punto cualquiera P de la misma al origen es igual a la longitud del segmento de tangente a la curva en P, cuyos extremos son P y su intersección con el eje x. Sabiendo que C pasa por el punto (2,1), halle su ecuación
JUSTIFIQUE SU RESPUESTA